



schema-F

Mathematische
Grundlagen

Elemente der Analysis Aufgaben und Lösungen



Lernmaterial
zum Modul
- 01141 -
der Fern-
universität
Hagen

Verantwortlich für den Inhalt

Schema-F, Andreas Kämpfer
kontakt@schema-f-hagen.de

Ersteller

Felix Fonseca Kerkhoff
fonseca-kerkhoff@posteo.de

Hinweis

Das Werk ist urheberrechtlich geschützt. Die dadurch begründeten Rechte, insbesondere das Recht der Vervielfältigung und Verbreitung sowie der Übersetzung und des Nachdrucks, bleiben, auch bei nur auszugsweiser Verwertung, vorbehalten. Kein Teil des Werkes darf in irgendeiner Form (Druck, Fotokopie, Mikrofilm oder ein anderes Verfahren) ohne schriftliche Genehmigung oder unter Verwendung elektronischer Systeme verarbeitet, vervielfältigt oder verbreitet werden.

Inhaltsverzeichnis

1	Folgen	5
1.1	Konvergenzbeweise durch Abschätzungen	5
	Aufgabe 1.1.1	5
	Aufgabe 1.1.2	6
1.2	Grenzwerte bestimmen	7
	Aufgabe 1.2.1	7
	Aufgabe 1.2.2	8
	Aufgabe 1.2.3	9
1.3	Rekursiv definierte Folgen	10
	Aufgabe 1.3.1	10
	Aufgabe 1.3.2	12
	Aufgabe 1.3.3	14
1.4	Monotoniekriterium bei nicht rekursiv definierten Folgen	16
	Aufgabe 1.4.1	16
2	Reihen	17
2.1	Nullfolgenkriterium	17
	Aufgabe 2.1.1	17
	Aufgabe 2.1.2	17
2.2	Minoranten- und Majorantenkriterium	19
	Aufgabe 2.2.1	19
	Aufgabe 2.2.2	19
2.3	Leibnizkriterium	20
	Aufgabe 2.3.1	20
2.4	Teleskopsummen	21
	Aufgabe 2.4.1	21
	Aufgabe 2.4.2	22
2.5	Quotientenkriterium	23
	Aufgabe 2.5.1	23
	Aufgabe 2.5.2	23
	Aufgabe 2.5.3	24
2.6	Wurzelkriterium	25
	Aufgabe 2.6.1	25
2.7	Potenzreihen	26
	Aufgabe 2.7.1	26
	Aufgabe 2.7.2	27
	Aufgabe 2.7.3	28
3	Stetigkeit und Differenzierbarkeit	29
3.1	Die Ableitung bestimmen	29
	Aufgabe 3.1.1	29
	Aufgabe 3.1.2	30
	Aufgabe 3.1.3	31
	Aufgabe 3.1.4	32

Aufgabe 3.1.5	33
3.2 Das Taylorpolynom	34
Aufgabe 3.2.1	34
Aufgabe 3.2.2	35
3.3 Monotonieabschnitte und Extrema bei differenzierbaren Funktionen	36
Aufgabe 3.3.1	36
Aufgabe 3.3.2	37
Aufgabe 3.3.3	38
3.4 Der Zwischenwertsatz bei stetigen Funktionen	40
Aufgabe 3.4.1	40
Aufgabe 3.4.2	41
3.5 Der Mittelwertsatz der Differentialrechnung	42
Aufgabe 3.5.1	42
Aufgabe 3.5.2	42
3.6 Theoretische Aussagen zu Monotonie und Extrema	43
Aufgabe 3.6.1	43
Aufgabe 3.6.2	44
3.7 Berechnung von Grenzwerten mit der l'Hospitalschen Regel	45
Aufgabe 3.7.1	45
Aufgabe 3.7.2	45
4 Integralrechnung	46
4.1 Einfache Integrale berechnen	46
Aufgabe 4.1.1	46
Aufgabe 4.1.2	46
Aufgabe 4.1.3	47
4.2 Partielle Integration	48
Aufgabe 4.2.1	48
Aufgabe 4.2.2	48
Aufgabe 4.2.3	49
Aufgabe 4.2.4	49
4.3 Substitution	50
Aufgabe 4.3.1	50
Aufgabe 4.3.2	51
Aufgabe 4.3.3	51



1.3 Rekursiv definierte Folgen

Aufgabe 1.3.1

Aufgabenstellung

Die Folge a_n sei rekursiv definiert vermöge

$$a_0 := 18, \quad a_{n+1} := \frac{a_n}{3} + \frac{6}{a_n}$$

- Beweisen Sie mithilfe des Monotonieprinzips, dass die Folge konvergiert.
- Bestimmen Sie den Grenzwert von (a_n) .

Hinweis: Zeigen Sie dazu zunächst per vollständige Induktion, dass $a_n \geq 3$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Lösung

Zunächst beweist man die Abschätzung aus dem Hinweis. Für $n = 0$ ist $a_0 = 18 > 3$ und die Abschätzung erfüllt. Der Induktionsanfang funktioniert also.

Nun nimmt man an, für alle $m \leq n$ gelte $a_m \geq 3$. (Induktionsvoraussetzung, IV)

Daraus kann man die folgende Abschätzung ableiten:

$$\begin{aligned} 3 \cdot a_{n+1} &\stackrel{\text{IV}}{\geq} a_n \cdot a_{n+1} \stackrel{\text{Df}}{=} a_n \cdot \left(\frac{a_n}{3} + \frac{6}{a_n} \right) = \frac{a_n^2}{3} + 6 \\ &\stackrel{\text{IV}}{\geq} \frac{3^2}{3} + 6 = 9 \\ \Leftrightarrow a_{n+1} &\geq 3 \end{aligned}$$

Damit ist der Induktionsschritt gezeigt und die Abschätzung aus dem Hinweis bewiesen.

- Das Monotonieprinzip wendet man, gemäß der Erklärung, an, indem man die folgenden Schritte beweist.

1. Schritt: Art der Monotonie bestimmen.

Dazu errechnet man die ersten Folgenglieder

$$a_0 = 18, \quad a_1 = 6.3333\dots, \quad a_2 = 3.05847\dots$$

Daraus ergibt sich fallende Monotonie in den ersten Gliedern.

2. Schritt: Monotonie beweisen per Induktion.

Dazu dient als Induktionsanfang der Schritt 1: $\frac{a_1}{a_0} < 1$. Die Induktionsvoraussetzung lautet: Für



alle $m < n$ gilt $\frac{a_{m+1}}{a_m} \leq 1$. Im Induktionsschritt beweist man, dass dann auch $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq 1$. Dazu setzt man die Definition der Folge ein und formt um:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \stackrel{\text{Df}}{=} \frac{\frac{a_n}{3} + \frac{6}{a_n}}{a_n} = \frac{1}{3} + \frac{6}{a_n^2}$$

Mithilfe der Abschätzung aus dem Hinweis erhält man

$$\leq \frac{1}{3} + \frac{6}{3^2} = 1$$

Damit ist der Induktionsschritt gezeigt und die Monotonie bewiesen.

3. und 4. Schritt:

Die Beschränktheit nach unten wurde bereits mit der Abschätzung aus dem Hinweis bewiesen.

Aus dem Gezeigten folgt, dass die Folge (a_n) monoton fallend und nach unten beschränkt ist. Demzufolge ist sie konvergent.

- b) Der Grenzwert a_∞ ist ein Fixpunkt der Rekursionsgleichung, also Lösung der Gleichung $x = \frac{x}{3} + \frac{6}{x}$. Da $a_n \geq 3$ für alle n , folgt $a_\infty \geq 3$. Somit lässt sich diese Gleichung auf $x \geq 3$ einschränken.

$$\begin{aligned} x = \frac{x}{3} + \frac{6}{x} &\iff \frac{2}{3}x = \frac{6}{x} \\ &\iff x^2 = 9 \\ &\iff x = 3 \end{aligned}$$

Da $x = 3$ die einzige Lösung der Gleichung ist, mit $x \geq 3$, folgt notwendig, dass $a_\infty = x = 3$.