Mathematische
Grundlagen

Elemente der Analysis

Aufgaben und Lösungen

Lernmaterial
zum Modul
- 01141 -
der Fern-
universität
Hagen

Verantwortlich für den Inhalt

Schema-F, Andreas Kämpfer
kontakt@schema-f-hagen.de

Ersteller

Felix Fonseca Kerkhoff
fonseca-kerkhoff@posteo.de

Inhaltsverzeichnis

1.3 Rekursiv definierte Folgen

Aufgabe 1.3.1

Aufgabenstellung

Die Folge a_n sei rekursiv definiert vermöge

$$a_0 := 18, \qquad a_{n+1} := \frac{a_n}{3} + \frac{6}{a_n}$$

a) Beweisen Sie mithilfe des Monotonieprinzips, dass die Folge konvergiert.

b) Bestimmen Sie den Grenzwert von (a_n).

Hinweis: Zeigen Sie dazu zunächst per vollständige Induktion, dass $a_n \geq 3$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Lösung

Zunächst beweist man die Abschätzung aus dem Hinweis. Für $n = 0$ ist $a_0 = 18 > 3$ und die Abschätzung erfüllt. Der Induktionsanfang funktioniert also.

Nun nimmt man an, für alle $m \leq n$ gelte $a_m \geq 3$. (Induktionsvoraussetzung, IV)

Daraus kann man die folgende Abschätzung ableiten:

$$\begin{aligned} 3 \cdot a_{n+1} &\overset{\text{IV}}{\geq} a_n \cdot a_{n+1} \overset{\text{Df}}{=} a_n \cdot \left(\frac{a_n}{3} + \frac{6}{a_n}\right) = \frac{a_n^2}{3} + 6 \\ &\overset{\text{IV}}{\geq} \frac{3^2}{3} + 6 = 9 \\ \iff \quad a_{n+1} &\geq 3 \end{aligned}$$

Damit ist der Induktionsschritt gezeigt und die Abschätzung aus dem Hinweis bewiesen.

a) Das Monotonieprinzip wendet man, gemäß der Erklärung, an, indem man die folgenden Schritte beweist.

1. Schritt: Art der Monotonie bestimmen.
Dazu errechnet man die ersten Folgenglieder

$$a_0 = 18, \quad , a_1 = 6.3333..., \quad a_2 = 3.05847\ldots$$

Daraus ergibt sich fallende Monotonie in den ersten Gliedern.

2. Schritt: Monotonie beweisen per Induktion.
Dazu dient als Induktionsanfang der Schritt 1: $\frac{a_1}{a_0} < 1$. Die Induktionsvoraussetzung lautet: Für

alle $m < n$ gilt $\frac{a_{m+1}}{a_m} \leq 1$. Im Induktionsschritt beweist man, dass dann auch $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq 1$. Dazu setzt man die Definition der Folge ein und formt um:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \overset{\text{Df}}{=} \frac{\frac{a_n}{3} + \frac{6}{a_n}}{a_n} = \frac{1}{3} + \frac{6}{a_n^2}$$

Mithilfe der Abschätzung aus dem Hinweis erhält man

$$\leq \frac{1}{3} + \frac{6}{3^2} = 1$$

Damit ist der Induktionsschritt gezeigt und die Monotonie bewiesen.

3. und 4. Schritt:
Die Beschränktheit nach unten wurde bereits mit der Abschätzung aus dem Hinweis bewiesen.

Aus dem Gezeigten folgt, dass die Folge (a_n) monoton fallend und nach unten beschränkt ist. Demzufolge ist sie konvergent.

b) Der Grenzwert a_∞ ist ein Fixpunkt der Rekursionsgleichung, also Lösung der Gleichung $x = \frac{x}{3} + \frac{6}{x}$. Da $a_n \geq 3$ für alle n, folgt $a_\infty \geq 3$. Somit lässt sich diese Gleichung auf $x \geq 3$ einschränken.

$$\begin{aligned} x = \frac{x}{3} + \frac{6}{x} &\iff \frac{2}{3}x = \frac{6}{x} \\ &\iff x^2 = 9 \\ &\iff x = 3 \end{aligned}$$

Da $x = 3$ die einzige Lösung der Gleichung ist, mit $x \geq 3$, folgt notwendig, dass $a_\infty = x = 3$.