schema-F

Mathematische Grundlagen

Elemente der Analysis
Erläuterungen

Lernmaterial zum Modul - 01141 - der Fernuniversität Hagen

Verantwortlich für den Inhalt

Schema-F, Andreas Kämpfer
kontakt@schema-f-hagen.de

Ersteller

Felix Fonseca Kerkhoff
fonseca-kerkhoff@posteo.de

Inhaltsverzeichnis

1.3 Rekursiv definierte Folgen

Erklärung

Ein wichtiger Satz zum Beweis der Konvergenz von Folgen besagt, dass eine monoton steigende (bzw. fallende), nach oben (bzw. unten) beschränkte Folge konvergent ist. Diesen Satz verwendet man nun, um die Konvergenz von Folgen zu beweisen, die rekursiv definierte Folgenglieder haben. Denn in diesem Fall ist es oft schwierig, direkt Konvergenz nachzuweisen.

1. Schritt: Art der Monotonie bestimmen
Dazu berechnet man explizit die ersten drei oder vier Folgenglieder und stellt fest, ob die Folge wächst oder fällt.

2. Schritt: Monotonie beweisen
Dies funktioniert mit vollständiger Induktion. Nehmen wir an, wir haben in Schritt 1 festgestellt, dass die Folge wächst. Wenn sie fällt, funktionieren die folgenden Methoden genauso, nur eben mit umgekehrten Ordnungszeichen.

Der Induktionsanfang $a_1 \geq a_0$ ergibt sich aus Schritt 1. Als Induktionsvoraussetzung setzen wir stets $a_m \geq a_{m-1}$ für alle $m \leq n$.

Nun haben wir im Induktionsschritt $a_{n+1} \geq a_n$ zu zeigen. Wie das funktioniert, hängt natürlich davon ab, wie die Folgenglieder definiert sind. Ein allgemein gültiges Vorgehen lässt sich leider nicht angeben. Allerdings sind die folgenden beiden Ansätze oft hilfreich.

$$a_{n+1} \geq a_n \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} a_{n+1} - a_n \geq 0 & \text{oder} \\ \frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1 \end{cases}$$

3. Schritt: Obere (bzw. untere) Schranke c wählen
Die Wahl ist nicht eindeutig. Es ist jedoch sinnvoll, Werte als Schranken zu wählen, die zum Einen hinreichen groß sind und mit denen sich in der Definition von (a_n) leicht rechnen lässt.

Meist werden jedoch in der Aufgabe die Schranken bereits vorgegeben, sodass dieser Schritt nicht selbst ausgeführt werden muss.

4. Schritt: Beschränktheit beweisen
Auch hier benutzt man wieder die vollständige Induktion. Dabei ist der Induktionsanfang $a_0 \leq c$ immer klar, da a_0 ja in der Definition gegeben ist. Als Induktionsvoraussetzung setzen wir immer $a_m \leq c$ für alle $m \leq n$.

Im Induktionsschritt zeigt man dann $a_{n+1} \leq c$. Ebenso wie im vorherigen Schritt kann leider kein allgemeingültiges „Rezept" für diese Abschätzung gegeben werden. Meistens (nicht immer!) funktioniert aber bereits der Ansatz

$$a_{n+1} = f(a_n) \leq f(c) \leq c$$

Dabei ist f die Rekursionsfunktion.

In manchen Aufgaben werden die Schritte 3 und 4 als eigene Teilaufgabe formuliert. Diese müssen dann nicht noch einmal bewiesen werden.

Hat man nun die Konvergenz der Folge (a_n) bewiesen, so kann man in vielen Fällen (und zwar in allen, die hier behandelt werden) auch noch den Grenzwert bestimmen. Nämlich dann, wenn die Rekursionsfunktion f stetig ist. Die Rekursionsfunktion ist die Vorschrift, die besagt, wie aus a_n das Glied a_{n+1} berechnet wird. Man kann also die Rekursionsvorschrift aus der Definition von (a_n) wie folgt schreiben. $a_{n+1} = f(a_n)$.

Wenn (a_n) nun konvergiert, nennen wir den Grenzwert $a_\infty := \lim a_n$, dann kann man auf beiden Seiten der Gleichung zum Grenzwert übergehen und erhält $a_\infty = f(a_\infty)$. Denn wegen der Stetigkeit von f (die sei hier stets vorausgesetzt) kann man die Grenzwertbildung in das Argument der Funktion ziehen.

Das heißt aber, dass der Grenzwert notwendig eine Lösung der Gleichung $x = f(x)$ (ein sogenannter *Fixpunkt* von f) ist. Hat diese Gleichung nur eine Lösung, so kennt man den Grenzwert der Folge. Oft muss man dazu den Definitionsbereich der Gleichung $x = f(x)$ einschränken. Das kann man aber leicht tun, da im vorherigen Teil bereits Beschränktheit bewiesen worden ist.

Beispielaufgabe

Gegeben ist die rekursiv definierte Folge $a_0 := 1, \qquad a_{n+1} := \dfrac{a_n}{1+a_n}.$

Wir beweisen zunächst, dass $a_n > 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Der Induktionsanfang $a_0 = 1 > 0$ ist klar. Nehmen wir also an, dass $a_m > 0$ für alle $m \leq n$. Dann ist per Induktionsvoraussetzung $a_n > 0$ und $a_n + 1 > a_n > 0$. Also auch $a_{n+1} = \frac{a_n}{1+a_n} > 0$. Damit ist der Induktionsschritt bewiesen und es gilt $a_n > 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Nun beweisen wir Monotonie und Beschränktheit gemäß dem obigen schrittweisen Vorgehen.

1. Schritt: Art der Monotonie bestimmen

$$a_0 = 1, \quad a_1 = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}, \quad a_2 = \frac{1/2}{1+1/2} = \frac{1}{3}$$

Aus den ersten drei Folgengliedern ergibt sich fallende Monotonie.

2. Schritt: Monotonie beweisen

Der Induktionsanfang ergibt sich aus Schritt 1. Wir nehmen also an, dass $a_m \leq a_{m-1}$ für alle $m \leq n$.

Die Struktur der Rekursionsvorschrift legt nahe, den folgenden Quotienten zu betrachten

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \overset{\text{Def}}{=} \frac{\frac{a_n}{1+a_n}}{a_n} = \frac{1}{1+a_n}$$

Wie oben gezeigt, ist $a_n > 0$. Also ist $1 + a_n > 1$. Und folglich

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{1+a_n} < 1 \quad \Longrightarrow a_{n+1} < a_n$$

Damit ist der Induktionsschritt bewiesen. Die Folge ist also (streng) monoton fallend.

3. und 4. Schritt: Beschränktheit beweisen
Die Beschränktheit nach unten haben wir schon gezeigt: $a_n > 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Also haben wir insgesamt gezeigt, dass die Folge (streng) monoton fallend und nach unten beschränkt ist. Daraus folgt Konvergenz.

Die Rekursionsfunktion $f(x) := \dfrac{x}{1+x}$ ist stetig, also können wir den Grenzwert als ihren Fixpunkt bestimmen. Wegen der Monotonie und der Beschränktheit von (a_n) können wir auf $1 \geq x \geq 0$ einschränken.

$$x = \frac{x}{1+x} \Longleftrightarrow x(1+x) = x \Longleftrightarrow x + x^2 = x \Longleftrightarrow x^2 = 0 \Longleftrightarrow x = 0$$

Die einzige Lösung der Fixpunktgleichung ist $x = 0$. Demzufolge muss der Grenzwert $a_\infty = \lim a_n = x = 0$ sein.