schema-F

Algorithmische Mathematik

Bipartition und Matching, Valenzsequenz und Graphentheorie

Erläuterungen

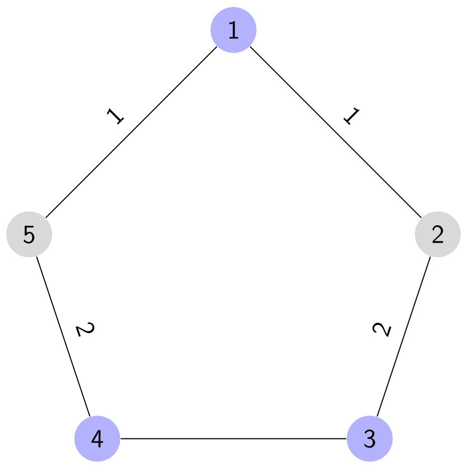
Lernmaterial zum Modul - 31201 - der Fern-universität Hagen

Inhaltsverzeichnis

3.1 Gegebenen Graph auf Bipartition prüfen und ggf. die Bipartition angeben

Strategie zur Bipartition: Man beginnt mit einem Knoten und markiert ihn, sucht die Nachbarknoten, die unmarkiert bleiben. Deren Nachbarknoten werden wieder markiert, die Nachbarknoten von diesen bleiben wieder unmarkiert, usw. Wichtig ist am Ende, dass es keine Verbindung zwischen zwei markierten oder zwei unmarkierten Knoten gibt.

Ein einfaches Beispiel für einen nicht bipartiten Graphen ist der K_5, ein Kreis der Länge 5:

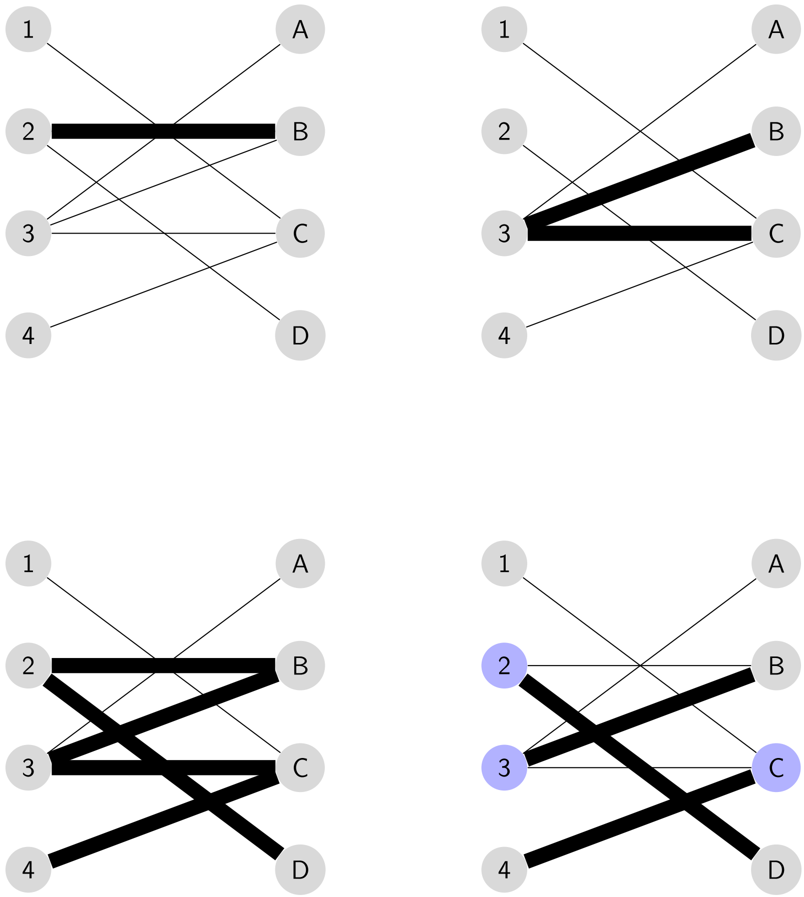


Geht man von einem markierten Knoten aus, so werden seine beiden Nachbarn nicht markiert. Deren Nachbarknoten gehören dann der gleichen Menge an und sind verbunden, was der Bipartition widerspricht. Das hätte man vorausahnen können, denn die wichtigste Charakterisierung besagt:

Ein Graph ist genau dann bipartit, wenn er keine Kreise ungerader Länge enthält.

Im ersten Beispiel ist in der mittleren Darstellung ersichtlich, dass er nur Kreise gerader Länge enthält, d.h. dass der Abzählreim beim Markieren in Kreis aufgeht.

Ein weiteres Beispiel für einen bipartiten Graphen sind vier jugendliche Damen (1,2,3,4) und Herren (A,B,C,D) in einem Freundschaftskreis.



Die Verbindungen im Graphen stellen gegenseitige Zuneigung dar, aus der eine Verbindung enstehen könnte. Wenn die Dame 3 und der Herr B eine Verbindung eingehen, sind 2 und C eifersüchtig. Die beiden versuchen die Verbindung zu zerstören, um selbst eine Verbindung aufzubauen. Haben sie Erfolg, wird die Verbindung (3,B) durch die Verbindungen (2,B) und (3,C) ersetzt. Dadurch wurden aber 4 und D in ihren Bemühungen gestört, sie können jetzt so stark intervenieren, dass die Verbindungen (2,B) und (3,C) zerbrechen und (4,C) und (3,D) neu entstehen, während sich 3 und B an ihre alte Liebe erinnern und diese erneuern. Das ist aber auch die maximale Menge an Verbindungen, die entstehen können, denn die Verbindungen werden nun nicht mehr von zwei Seiten angegriffen.

A Mit der oben genannten Strategie zur Bipartition kann man feststellen, ob ein Graph bipartit ist.

B Das Aufsuchen von Kreisen ungerader Länge zeigt, dass ein Graph nicht bipartit ist.

C Durch geschicktes Hinschauen kann man mit dem Heiratssatz von Hall erkennen, dass nicht alle einen Partner bekommen können, dass es kein perfektes Matching gibt.