



# schema-F

Grundlagen  
der Wirtschaftsmathematik und  
Statistik

## Lineare Algebra Aufgaben und Lösungen



Lernmaterial  
zum Modul  
- 40601 -  
der Fern-  
universität  
Hagen

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Vektoren</b>	<b>5</b>
1.1	Basics: Addition, Skalierung, Skalarprodukt, Norm	5
	Aufgabe 1.1.1	5
	Aufgabe 1.1.2	5
	Aufgabe 1.1.3	6
1.2	Lineare Unabhängigkeit	7
	Aufgabe 1.2.1	7
<b>2</b>	<b>Matrizen</b>	<b>8</b>
2.1	Basics: Rechenarten, spezielle Matrizen	8
	Aufgabe 2.1.1	8
2.2	Matrixmultiplikation	9
	Aufgabe 2.2.1	9
	Aufgabe 2.2.2	10
2.3	Matrixgleichungen	11
	Aufgabe 2.3.1	11
2.4	Determinante	12
	Aufgabe 2.4.1	12
	Aufgabe 2.4.2	12
2.5	Inverse Matrix (Adjungierte)	13
	Aufgabe 2.5.1	13
<b>3</b>	<b>Lineare Gleichungssysteme</b>	<b>14</b>
3.1	Die erweiterte Koeffizientenmatrix aufstellen	14
	Aufgabe 3.1.1	14
	Aufgabe 3.1.2	14
	Aufgabe 3.1.3	15
	Aufgabe 3.1.4	15
3.2	Auf Treppenform bringen und Bestimmung des Ranges	16
	Aufgabe 3.2.1 (Fortsetzung von Aufgabe 3.1.1)	16
	Aufgabe 3.2.2 (Fortsetzung von Aufgabe 3.1.2)	16
	Aufgabe 3.2.3 (Fortsetzung von Aufgabe 3.1.3)	18
	Aufgabe 3.2.4 (Fortsetzung von Aufgabe 3.1.4)	19
	Aufgabe 3.2.5	20
	Aufgabe 3.2.6	21
3.3	Lösungsmenge eines LGS aus der Treppennormalform bestimmen	22
	Aufgabe 3.3.1 (Fortsetzung von Aufgabe 3.2.1)	22
	Aufgabe 3.3.2 (Fortsetzung von Aufgabe 3.2.2)	22
	Aufgabe 3.3.3 (Fortsetzung von Aufgabe 3.2.3)	23
	Aufgabe 3.3.4 (Fortsetzung von Aufgabe 3.2.4)	24
3.4	Geometrie	25
	Aufgabe 3.4.1 (Fortsetzung von Aufgabe 3.2.1)	25
	Aufgabe 3.4.2	25
	Aufgabe 3.4.3	26

<b>4</b>	<b>Analytische Geometrie</b>	<b>27</b>
4.1	Winkel, Orthogonalität, Längen und Flächen . . . . .	27
	Aufgabe 4.1.1 . . . . .	27
	Aufgabe 4.1.2 . . . . .	27
4.2	Hesse-Normalform einer Geraden in der Ebene . . . . .	28
	Aufgabe 4.2.1 . . . . .	28
	Aufgabe 4.2.2 . . . . .	28
4.3	Abstand „Punkt/Gerade“ . . . . .	29
	Aufgabe 4.3.1 (Fortsetzung von 4.2.1) . . . . .	29
	Aufgabe 4.3.2 (Fortsetzung von 4.2.1) . . . . .	29
4.4	Abstand „Punkt/Hyperebene“ . . . . .	30
	Aufgabe 4.4.1 . . . . .	30
<b>5</b>	<b>Lineare Optimierung</b>	<b>31</b>
5.1	Modellieren . . . . .	31
	Aufgabe 5.1.1 . . . . .	31
	Aufgabe 5.1.2 . . . . .	32
	Aufgabe 5.1.3 . . . . .	33
5.2	Graphische Darstellung und Lösung in 2D . . . . .	35
	Aufgabe 5.2.1 . . . . .	35
5.3	Problem in Normalform bringen . . . . .	37
	Aufgabe 5.3.1 . . . . .	37
	Aufgabe 5.3.2 (Fortsetzung von Aufgabe 5.1.2) . . . . .	38
	Aufgabe 5.3.3 (Fortsetzung Aufgabe 5.1.3) . . . . .	39
	Aufgabe 5.3.4 . . . . .	40
5.4	Simplexalgorithmus . . . . .	42
	Aufgabe 5.4.1 . . . . .	42
	Aufgabe 5.4.2 . . . . .	44
	Aufgabe 5.4.3 . . . . .	46
	Aufgabe 5.4.4 . . . . .	48
5.5	Simplextableau interpretieren . . . . .	50
	Aufgabe 5.5.1 . . . . .	50
	Aufgabe 5.5.2 . . . . .	51
	Aufgabe 5.5.3 . . . . .	52
	Aufgabe 5.5.4 . . . . .	53
	Aufgabe 5.5.5 . . . . .	54

## 2.2 Matrixmultiplikation

### Aufgabe 2.2.1

#### Aufgabenstellung

Berechnen Sie  $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x}$  für

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 3 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

#### Lösung

	1	
	-2	
	1	
1	0	-1
3	-2	1
-2	1	0

$$1 \cdot 1 + 0 \cdot (-2) + (-1) \cdot 1 = 0$$

$$3 \cdot 1 + (-2) \cdot (-2) + 1 \cdot 1 = 8$$

$$(-2) \cdot 1 + 1 \cdot (-2) + 0 \cdot 1 = -4$$

Das Matrix-Vektor-Produkt lautet also

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ 8 \\ -4 \end{bmatrix}$$

## Aufgabe 2.2.2

### Aufgabenstellung

Berechnen Sie  $\mathbf{B} \cdot \mathbf{A}^T$  für

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 1 \\ 0 & 1 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$$

### Lösung

		1	1	0
		0	-1	2
2	0			
2	1			
0	1			
3	-1			

$$\begin{aligned}
 2 \cdot 1 + 0 \cdot 0 &= 2 \\
 2 \cdot 1 + 0 \cdot (-1) &= 2 \\
 2 \cdot 0 + 0 \cdot 2 &= 0 \\
 2 \cdot 1 + 1 \cdot 0 &= 2 \\
 2 \cdot 1 + 1 \cdot (-1) &= 1 \\
 2 \cdot 0 + 1 \cdot 2 &= 2 \\
 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0 &= 0 \\
 0 \cdot 1 + 1 \cdot (-1) &= -1 \\
 0 \cdot 0 + 1 \cdot 2 &= 2 \\
 3 \cdot 1 + (-1) \cdot 0 &= 3 \\
 3 \cdot 1 + (-1) \cdot (-1) &= 4 \\
 3 \cdot 0 + (-1) \cdot 2 &= -2
 \end{aligned}$$

Das Matrixprodukt lautet also

$$\mathbf{B} \cdot \mathbf{A}^T = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 2 \\ 3 & 4 & -2 \end{bmatrix}$$