schema-F

Grundlagen der Wirtschaftsmathematik und Statistik

Lineare Algebra
Erläuterungen

Lernmaterial zum Modul - 40601 - der Fernuniversität Hagen

Inhaltsverzeichnis

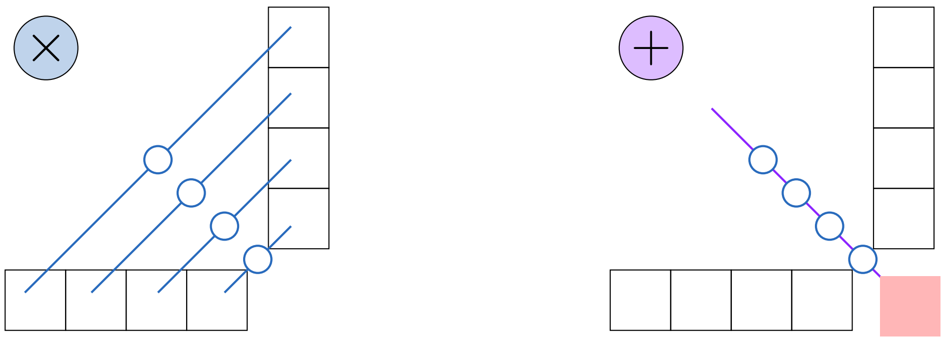
2.2 Matrixmultiplikation

Erklärung

Im vorherigen Abschnitt haben wir die grundlegenden Rechenarten der Matrizen kennen gelernt. Diese braucht man zwar, um mit Matrizen hantieren zu können, die wahre Power der Matrizen entfaltet sich aber in der *Matrixmultiplikation*. Es ist wohl nicht übertrieben zu behaupten, dass über $70\,\%$ der Rechnungen in höherer Mathematik eine Matrixmultiplikation zum Bestandteil haben. Die wichtigsten sind dabei: Das Lösen linearer Gleichungssysteme - O.K.: eigentlich Das Lösen aller möglicher Gleichungssysteme -, mehrdimensionale Ableitungen, Optimierung, Interpolation, Lineare Regression, usw. usf.

Nach diesem flammenden Plädoyer für die Matrixmultiplikation wollen wir nun sehen, wie sie funktioniert. Dazu zuerst folgende Bemerkung: Jeder Vektor kann auch als Matrix angesehen werden. Diese Matrix besteht dann nur aus einer Spalte und so vielen Zeilen, wie der Vektor Komponenten hat.

Transponiert man diesen Vektor, so erhält man eine Matrix, die nur aus einer Zeile und entsprechend vielen Spalten besteht. Mann nennt solche Einzeilermatrizen auch *Zeilenvektor*. Die Matrixmultiplikation aus einer Zeile und einer Spalte ist gerade das **Skalarprodukt** aus Zeilenvektor und Spaltenvektor. Nun erklärt sich auch das $\top$-Symbol, das im Abschnitt 1.1 etwas unklar war. In folgendem Schema ist das Skalarprodukt grafisch dargestellt:

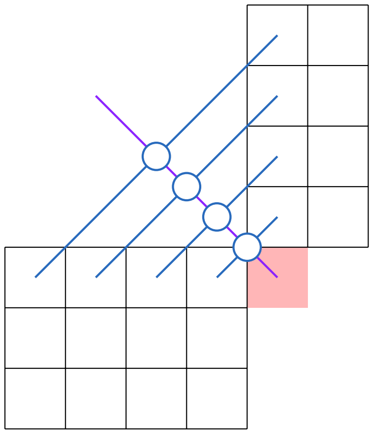


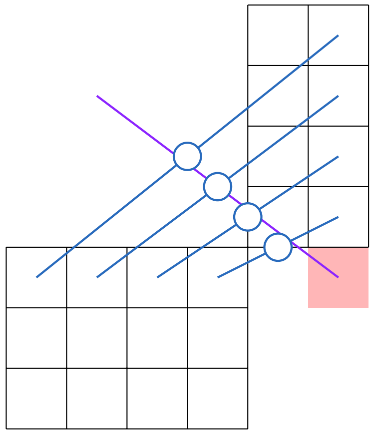
Nun können wir alle möglichen Matrizen multiplizieren, deren Größen stimmen. Denn eine Matrix können wir auffassen als eine Sammlung von Spalten- bzw. Zeilenvektoren. Haben wir die Matrizen $\mathbf{A}$ und $\mathbf{B}$ gegeben, so können wir das Produkt $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ berechnen, wenn

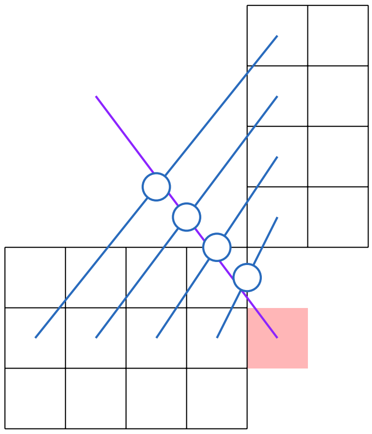
Zeilengröße von $\mathbf{A}$ = *Spaltengröße von* $\mathbf{B}$.

Das sieht man auch in obigem Schema. Stimmen die Größen überein, so multiplizieren wir nacheinander alle Spalten von $\mathbf{B}$ mit allen Zeilen von $\mathbf{A}$.

Man kann sich dies in einem Tabellenschema (genannt „Hornerschema") wie folgt gut einprägen:







usw.

Beispielaufgabe

Wir betrachten die Matrizen

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 3 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}$$

Wir stellen fest, dass das Produkt $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ berechnet werden kann, nicht aber $\mathbf{B} \cdot \mathbf{A}$.

Wir wollen $\mathbf{B}^\top \cdot \mathbf{A}$ mithilfe des Hornerschemas berechnen:

$$\begin{array}{ccc|ccc} & & & 2 & 0 & -1 \\ & & & 1 & 3 & 0 \\ & & & 0 & -2 & 1 \\ \hline 1 & 1 & -2 & & & \\ 0 & 3 & -1 & & & \end{array}$$

$$\begin{aligned} 1 \cdot 2 + 1 \cdot 1 + (-2) \cdot 0 &= 3 \\ 1 \cdot 0 + 1 \cdot 3 + (-2) \cdot (-2) &= 7 \\ 1 \cdot (-1) + 1 \cdot 0 + (-2) \cdot 1 &= -3 \\ 0 \cdot 2 + 3 \cdot 1 + (-1) \cdot 0 &= 3 \\ 0 \cdot 0 + 3 \cdot 3 + (-1) \cdot (-2) &= 11 \\ 0 \cdot (-1) + 3 \cdot 0 + (-1) \cdot 1 &= -1 \end{aligned}$$

Das Matrixprodukt lautet also

$$\mathbf{B}^\top \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 7 & -3 \\ 3 & 11 & -1 \end{bmatrix}$$